Wahrscheinlichkeitslehre

I. Was ist unter dem Ausdruck "wahrscheinlich" zu verstehen?

Wir unterscheiden vier verschiedene, teils miteinander zusammenhängende, teils heterogene Verwendungen des Ausdrucks "wahrscheinlich":

1. Wahrscheinlichkeit als *alltagssprachig-intuitiver* Ausdruck. (Wahrscheinlichkeitsbegriff von Tante Emma)
2. Wahrscheinlichkeit als *apriorisch-mathematischer* Ausdruck.
(Klassischer Wahrscheinlichkeitsbegriff nach La Place)
3. Wahrscheinlichkeit als *empirisch-statistischer* Ausdruck.
(empirischer Wahrscheinlichkeitsbegriff nach von Mises)
4. Wahrscheinlichkeit als Ausdruck im Rahmen einer *axiomatisch* begründeten formalen Theorie. (Kolmogorow)

1. Alltagsprachig bezeichnen wir jedes Ereignis, dessen Eintreten wir nicht mit Sicherheit voraussagen können oder konnten, als mehr oder weniger wahrscheinlich. Denken Sie etwa an folgende Formulierungen: "Welch ein Zufall, dass wir uns gestern getroffen haben"; "Bei der politische Lage von 1939 war der Ausbruch des zweiten Weltkrieges sehr wahrscheinlich"; "Bei der heutigen beruflichen Situation eines Akademikers ist es nach Abschluss des Psychologie Studiums sehr unwahrscheinlich, eine fixe Stelle zu bekommen".
Es ist in all diesen Kontexten nicht ganz klar, was nun genau "zufällig" bzw. "wahrscheinlich" bedeutet. Wir orientieren uns in unserem Verhalten zwar an solchen Aussagen. Was aber insbesondere in derartigen Aussagen unklar bleibt, ist das *Ausmaß* der Wahrscheinlichkeit. So beinhaltet beispielsweise die Aussage, wir haben uns nur zufällig getroffen, dass unser Treffen unerwartet kam, also nicht sehr wahrscheinlich war. Wie wenig wahrscheinlich aber? War die Wahrscheinlichkeit, uns zu treffen, nur 0,41 oder belief sie sich gar auf 0,5???
Wie man an dem Beispiel sieht, enthält der alltagssprachige Begriff der Wahrscheinlichkeit wenig Informationen über das Ausmaß der Wahrscheinlichkeit.
Dazu ist es erforderlich, unseren Begriff der Wahrscheinlichkeit zu präzisieren. Überlegen wir uns zunächst, woher die Schwierigkeiten kommen, der in der obigen Aussage ausgedrückten Wahrscheinlichkeit unseres Treffens eine Zahl zuzuordnen. Das Problem dabei ist, dass wir die verschiedenen möglichen Umstände, unter denen ein Treffen zustande kommen kann, nicht exakt unterscheiden können. Ähnliches gilt für den Ausbruch eines Krieges. Auch in diesem Falle tun wir uns schwer, die verschiedenen Bedingungen, die einen Krieg auslösen können, auseinander zu halten.

Zur Klärung dieses Problems folgende terminologische Vorbemerkung: Eine zufällige Begegnung, der Ausbruch eines Krieges, das Erlangen eines festen Dienstverhältnisses, lassen sich als einzelne Ereignisse bezeichnen.
Nun ist das Werfen einer bestimmten Augenzahl, wie wir es in Glückspielen antreffen, ebenfalls ein einzelnes Ereignis. Bevor wir würfeln, gibt es bei einem normalen Würfel genau sechs verschiedene Augenzahlen, die wir bekommen können. Es gibt also genau sechs verschiedene Einzelereignisse, die eintreten können. Es ist beispielsweise unmöglich, eine sieben zu würfeln. Die sechs verschiedenen Einzelereignisse bilden einen so genannten *Ereignisraum*. Da alle sechs möglichen Einzelereignisse gleichwahrscheinlich sind, beträgt - vorerst rein intuitiv gesprochen - die Wahrscheinlichkeit, ein bestimmtes Einzelereignis - eine bestimmte Augenzahl - zu bekommen, ein sechstel. Vergleicht man nun dieses Beispiel mit den beiden alltagssprachig beschriebenen Situationen - eine zufällige Begegnung, der Ausbruch eines Krieges, so sieht man, worin der Unterschied zum Würfelspiel besteht. In den beiden Situationen tun wir uns schwer, den *Ereignisraum* exakt einzugrenzen. Was bedeutet genau die Anzahl der Begegnungen? Bezieht sich die Zufälligkeit unserer Begegnung auf den gestrigen Tag oder auf alle Tage? Derartige Fragen bleiben in der alltagsprachigen Verwendung des Wortes "wahrscheinlich" ungeklärt. Die alltagsprachige Verwendung des Wortes ist lediglich Ausdruck des Grades unserer *subjektiven Gewissheit*, aber kein objektivierbares Maß für das Eintreten eines Ereignisses. Wir können die Wahrscheinlichkeit daher nur schlecht mit einer Maßzahl quantifizieren.
Fassen wir daher zunächst präziser, was mit den Ausdrücken "Elementarereignis" und "Ereignisraum" gemeint ist.
Ein Ereignisraum bezeichnet die Menge aller möglichen Ergebnisse, die wir bei einem bestimmten Experiment erzielen können.
Beispiele: das Messen der Reaktionszeit in ms, das Werfen einer bestimmten Augenzahl, ein Intelligenztest, in einem Fragebogen die Variable "Geschlecht" usw.
Die *Elementarereignisse* sind nun nichts anderes als die möglichen erzielbaren Ergebnisse in einem Experiment.
Beispiele: die Reaktionszeit 30 ms; die Augenzahl 6; ein IQ von 140; das Geschlecht "weiblich" usw.

Überlegen wir uns im Anschluss an diese begrifflichen Festlegungen, was im Falle der dritten alltagsprachigen Formulierung - das Erlangen eines festen Dienstverhältnisses - "Ereignisraum" und "Elementarereignis" sein könnten.
Stellen Sie sich vor, auf eine Ausschreibung für eine freie Stelle würden sich 10 Bewerber einfinden. Der Ereignisraum wäre in diesem Falle die aufgrund der ausgeschriebenen Stelle möglichen Bewerber und ein Elementarereignis wäre eine einzelne Bewerbung. Da wir in diesem Falle die Elementarereignisse genau angeben können, scheint einer Berechnung der Wahrscheinlichkeit nichts mehr im Wege zu stehen: Ihre Chance, die Stelle zu bekommen - so könnte man glauben -, beträgt genau ein zehntel. Nun wissen Sie freilich, dass eine derartige Berechnung der Wahrscheinlichkeit reichlich naiv wäre. Sie gehen nämlich in der Berechnung von der *Chancengleichheit* aller Kandidaten aus. Diese ist aber in unserem Bewerbungsalltag nur selten gegeben.
Das Beispiel lehrt uns, dass die exakte Angabe aller möglichen Elementarereignisse nur einen ersten zwar notwendigen, aber keineswegs hinreichenden Schritt zur Berechnung der

Wahrscheinlichkeit darstellt. Was wir darüber hinaus noch klären müssen, ist die Frage, wie sich die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Elementarereignisse untereinander aufteilen. Sind alle Elementarereignisse denn überhaupt *gleichwahrscheinlich*?
Von dieser Annahme geht zumindest die *klassische* Definition der Wahrscheinlichkeit aus, womit wir bei der *zweiten* Verwendung des Wortes "wahrscheinlich" angelangt sind.

2. Wahrscheinlichkeit als mathematisch-a priorischer Ausdruck

Gehen wir davon aus, dass alle Elementarereignisse in einem Ereignisraum die gleichen Chancen haben, so beträgt die Wahrscheinlichkeit eines Elementarereignisses 1/n, wobei n die Anzahl aller Elementarereignisse bezeichnet.

Beispiel: n ist die Anzahl aller möglichen Augenzahlen, ein Elementarereignis ist die Augenzahl "2", die Wahrscheinlichkeit dafür ist nach obiger Definition ein sechstel.
Diese - auch als klassische Definition der Wahrscheinlichkeit bezeichnete - Wahrscheinlichkeit ist nun insofern a priori, als sie sich auf keine empirischen Experimente stützt.

Kennen wir die Wahrscheinlichkeit eines Elementarereignisses, so lassen sich zusammengesetzte Ereignisse nach folgender Formel berechnen:
p (A) = Anzahl der Elementarereignisse von A / Anzahl der Elementarereignisse des Ereignisraumes.

Beispiel: Betrachten wir das zusammengesetzte Ereignis: Werfen einer geraden Augenzahl. Mögliche gerade Augenzahlen sind: 2,4 und 6. Das zusammengesetzte Ereignis "Werfen einer geraden Augenzahl" setzt sich somit aus drei Elementarereignissen zusammen. Die Wahrscheinlichkeit für dieses Ereignis ist somit 3/6 = 1/2.

Besteht das zusammengesetzte Ereignis aus *allen* möglichen Elementarereignissen des Ereignisraumes, so ist die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses = n/n = 1. Man nennt dies auch das *sichere* Ereignis.

Bei der Ermittlung der Einzelwahrscheinlichkeiten der Elementarereignisse stehen wir aber bei der apriorischen Wahrscheinlichkeit vor dem Problem, dass *Chancengleichheit* der Elementarereignisse eben a priori (von vornherein) *vorausgesetzt* wird, nicht aber empirisch nachweisbar ist. In der Praxis, wie uns das Beispiel mit der Bewerbung lehrt, ist Gleichwahrscheinlichkeit in vielen empirischen Fragestellungen nicht voraussetzbar und daher der klassische Wahrscheinlichkeitsbegriff nicht anwendbar. Es ist beispielsweise denkbar, dass beim Werfen einer speziell präparierten Münze nach 50 Versuchen in 45 Fällen Wappen und lediglich in 5 Fällen Zahl erscheint. In diesem speziellen Falle von einer Gleichwahrscheinlichkeit auszugehen, ist wenig sinnvoll. Außerdem ist die Definition von Wahrscheinlichkeit durch die Behauptung der *Gleichwahrscheinlichkeit* der Elementarereignisse zirkulär. Wir setzen den Begriff der Wahrscheinlichkeit bereits bei unserer Definition von Wahrscheinlichkeit voraus. Sinnvoller dagegen ist, einen anderen

Zugang zum Begriff der Wahrscheinlichkeit zu wählen, nämlich: wir *ermitteln experimentell* die Wahrscheinlichkeit eines Elementarereignisses über die relative Häufigkeit.

3. Empirisch-statistische Wahrscheinlichkeit

Zunächst zum Begriff der relativen Häufigkeit. Ein Experiment mit einer bestimmten Anzahl möglicher Elementarereignisse werde n mal wiederholt. Das Experiment sei z.B. das Würfeln einer Augenzahl. Die Anzahl der Elementarereignisse in diesem Beispiel ist 6. Ein einzelnes dieser Elementarereignisse bezeichnen wir mit A_i, wobei in unserem Falle gilt: $A_1 = 1$; $A_2 = 2$; $A_3 = 3$; $A_4 = 4$; $A_5 = 5$; $A_6 = 6$.
Die relative Häufigkeit sagt uns nun, wie oft eines dieser Elementarereignisse in der Versuchsreihe auftritt. Angenommen, ein Elementarereignis A_i trete m-mal auf. Dann ist

$h= m/n$

Würfeln wir bei 10 Versuchen 3-mal eine 2, dann ist die relative Häufigkeit des Vorkommens der Augenzahl 2 = 3/10.

Der empirisch-statistische Wahrscheinlichkeitsbegriff geht nun davon aus, dass bei hinreichend großem n die relative Häufigkeit sich einem praktisch konstanten Wert nähert. Dieser konstante Wert wird als Wahrscheinlichkeit des Elementarereignisses A_i bezeichnet. Die empirisch-statistische Wahrscheinlichkeit *definiert* also Wahrscheinlichkeit als Grenzwert der relativen Häufigkeit. Damit wird der Zirkel in der Definition, wie wir ihn bei der Definition der apriorischen Wahrscheinlichkeit über die Gleichwahrscheinlichkeit hatten, vermieden. Betrachten wir hierzu folgendes Beispiel:
Angenommen, Sie glauben einfach nicht daran, dass bei einem fairen Würfel die Wahrscheinlichkeit des Elementarereignisses "Augenzahl 2" ein sechstel beträgt. Stattdessen wollen Sie die Wahrscheinlichkeit für das Vorkommen der Augenzahl "2" experimentell ermitteln. Sie würfeln daher 6000-mal hintereinander. Wenn nun in annähernd 1000 Würfen die Augenzahl "2" auftritt, so beträgt die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten von "2" 1000/6000 = 1/6. Man beachte, dass dieser Wert rein *empirisch* ermittelt wurde. Nicht aufgrund irgendwelcher theoretischen Vorannahmen über die Gleichwahrscheinlichkeit des Auftretens der verschiedenen Augenzahlen, sondern einzig und allein über die relative Häufigkeit wurde die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten der Augenzahl "2" definiert. Hätten wir beispielsweise 1200-mal eine "2" gewürfelt, so wäre die Wahrscheinlichkeit für "2" 1200/6000.

Die rein experimentell definierte Wahrscheinlichkeit stellt uns aber vor drei Probleme: ein mathematisches, ein logisches und ein physikalisches Problem.

Das *mathematische* Problem besteht darin, dass der konstante Wert, dem sich die relative Häufigkeit bei einer hinreichend großen Versuchsreihe nähern soll, als mathematischer Grenzbegriff zu einer *unendlichen* Folge gehört. Eine derartige Folge lässt sich aber niemals experimentell erkunden, da wir es in der Praxis ja immer nur mit endlichen Versuchsreihen zu tun haben.

Damit verbindet sich nun aber auch eine logische Schwierigkeit: Das Problem besteht darin, dass wir bei einer *Definition* der Wahrscheinlichkeit über die - empirisch ermittelte (!) - Häufigkeit gar nicht mehr *sagen* können, dass die Wahrscheinlichkeit durch die experimentell beobachtete Häufigkeit *geschätzt* wird. Die experimentell beobachtete Häufigkeit ist *per definitionem* die Wahrscheinlichkeit und daher keine Schätzung der Wahrscheinlichkeit. Um überhaupt *sagen* zu können, dass sich die relative Häufigkeit bei einer hinreichend großen Versuchsreihe sich der Wahrscheinlichkeit *nähert*, würden wir einen Wahrscheinlichkeitsbegriff benötigen, der prinzipiell *unabhängig* ist von der empirisch ermittelten Wahrscheinlichkeit. Die Wahrscheinlichkeit a posteriori *ersetzt* nun aber den klassischen Begriff der Wahrscheinlichkeit. Wodurch wird nun aber der klassische Wahrscheinlichkeitsbegriff ersetzt? Durch die relative Häufigkeit? Diese nähert sich aber erst bei einer unendlichen Versuchsreihe einem konstanten Wert. Ersetzen wir nun den Begriff der Wahrscheinlichkeit durch die endliche Versuchsreihe, dann gilt das als wahrscheinlich, was wir gerade rein zufällig gewürfelt haben. Wahrscheinlichkeit wäre dann nicht Grenzwert der relativen Häufigkeit. Ersetzen wir nun aber den Begriff der Wahrscheinlichkeit durch eine unendliche Versuchsreihe, so ist ein dergestalt gewonnener Wahrscheinlichkeitsbegriff nicht mehr a posteriori, nicht mehr empirisch.
Der *physikalische* Einwand besteht darin, dass eine beliebige Annäherung an einen konstanten Wert wegen der Messungenauigkeit im atomaren Bereich (Heisenberg!) experimentell gar nicht ermittelt werden kann.

Daraus ergibt sich folgender Schluss: Da sich Wahrscheinlichkeit weder über den Begriff der Gleichwahrscheinlichkeit definieren lässt - dies führt zu einem Zirkel in der Erklärung -, noch auch durch den schwächeren Begriff der empirisch ermittelten relativen Häufigkeit ersetzt werden kann, bleibt nur mehr der Ausweg, es aufzugeben, nach einer Definition für Wahrscheinlichkeit zu suchen, sondern sie einfach in einem Axiomensystem formal einzuführen, ohne sich um seine inhaltliche Bedeutung zu kümmern. Damit kommen wir zur letzten Verwendung des Wortes "wahrscheinlich".

4. Wahrscheinlichkeit als *axiomatisch-mathematischer* Ausdruck.

Axiome sind Postulate, unbewiesene und beweisunbedürftige Behauptungen. Wird die Wahrscheinlichkeit rein formal eingeführt, so wird die Frage, ob die Elementarereignisse gleichwahrscheinlich sind oder nicht, zunächst beiseite gestellt. Die Frage der Zuordnung einer konkreten Wahrscheinlichkeit zu den Wahrscheinlichkeiten der Elementarereignisse wird dem Praktiker überlassen. Der Mathematiker begnügt sich mit einer rein axiomatisch-formalen Verwendung von Wahrscheinlichkeit. Jedem Ereignis wird in Form eines Postulats eine Wahrscheinlichkeit zugeschrieben. Es wird aber dabei *nicht* gesagt, wie groß diese ist. Wahrscheinlichkeit ist hier zunächst ein weiter nicht festgelegter Grundbegriff. Die konkrete Zuordnung eines Zahlenwertes erfolgt entweder über die Gleichwahrscheinlichkeit (wie im Falle der klassischen Wahrscheinlichkeitstheorie) oder über die relative Häufigkeit (wie im Falle der empirisch-statistischen Wahrscheinlichkeit).

Durch diese Zuordnung wird nun aber Wahrscheinlichkeit nicht *definiert*, sondern eben nur ein Zahlenwert zugeordnet.

Die drei Axiome der axiomatisch begründeten Wahrscheinlichkeitstheorie sind:
1. Jedem Ereignis A_i wird eine Wahrscheinlichkeit mit einem Zahlenwert von

$$0 \leq p(A_i) \leq 1$$

zugeordnet.

2. Das sichere Ereignis hat die Wahrscheinlichkeit 1.

3. Die Wahrscheinlichkeit einer Summe zufälliger, einander ausschließender Ereignisse ist gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten dieser Ereignisse.

p (A_1 oder A_2 oder .. A_l) = $P(A_1) + P(A_2) + .. + P(A_l)$.

Aus diesen drei Postulaten wird nun die gesamte Wahrscheinlichkeitstheorie abgeleitet.

Das letztere Postulat wird auch als *Additionstheorem von Wahrscheinlichkeiten einander ausschließender Ereignisse* bezeichnet.

Aus diesen Axiomen lassen sich eine ganze Reihe weiterer Regeln der Wahrscheinlichkeitstheorie rein logisch ableiten. Statt einer Ableitung begnüge ich mich hier mit einer Auflistung der wichtigsten Regeln. Diese sind: a) das Additionstheorem von einander nicht ausschließenden Ereignissen (die so genannte „Oder-Wahrscheinlichkeit") b) das Multiplikationstheorem für voneinander abhängige Ereignisse (die so genannte „Und-Wahrscheinlichkeit") c) Multiplikationstheorem für voneinander unabhängige Ereignisse (die so genannte „Und-Wahrscheinlichkeit")

ad a) Das Additionstheorem

Dieses Theorem wird oft auch als "oder" Regel der Wahrscheinlichkeit bezeichnet. Grundsätzlich lässt sich die "oder" Wahrscheinlichkeit am folgenden Beispiel verdeutlichen: Wir wollen wissen, wie wahrscheinlich es ist, bei einmaligem Würfeln *entweder* eine 6 *oder* eine 5 zu würfeln. Beide Einzelereignisse schließen sich wechselseitig aus. Die "oder" Wahrscheinlichkeit fragt danach, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, daß eines dieser beiden Elementarereignisse eintritt. Im konkreten Fall beträgt diese Wahrscheinlichkeit - folgen wir dem 3. Axiom von Kolmogorov - 1/6 + 1/6.
Im Anschluss daran stellt sich nun die Frage, wie die "Oder-Wahrscheinlichkeit" zu berechnen ist, wenn sich die einzelnen Ereignisse nicht gegenseitig ausschließen.
Dies ist das Additionstheorem für einander nicht ausschließende Ereignisse. Es gilt:
Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten der Ereignisse A oder B ist gleich der Wahrscheinlichkeit für A plus der Wahrscheinlichkeit für B minus der Wahrscheinlichkeit für das gleichzeitige Eintreten von A und B.

Betrachten wir dazu folgendes Beispiel:
In einer Schule mit insgesamt 100 Schülern sind 51 Schüler weiblichen Geschlechts und 35 Schüler sind Linkshänder. Von den 35 Linkshändern sind wiederum 10 weiblichen Geschlechts. Betrachten wir dazu folgende Tabelle:

	W	M	
Linkshänder			
JA	10	25	35
NEIN	41	24	65
	51	49	
			100

Wir fragen nun nach der Wahrscheinlichkeit, aus dieser Schule zufällig ein Mädchen oder einen Linkshänder auszuwählen. Zu beachten ist, dass sich in diesem Beispiel die beiden Ereignisse "Mädchen" und "Linkshänder" gegenseitig nicht ausschließen. Ein zufällig ausgewählter Schüler ist nicht entweder weiblich oder Linkshänder, schließlich gibt es auch weibliche Linkshänder.
Was sind also in diesem Falle die verschiedenen einander ausschließenden Einzelereignisse? Es sind dies alle Mädchen plus alle nicht weiblichen Linkshänder. Dies ergibt in der Summe 51 + 25 einander ausschließende Elementarereignisse. Das ist aber das gleiche wie die 51 Mädchen plus die 35 Linkshänder minus die beiden sich überschneidenden Ereignisse "weiblich" und "Linkshänder" (10).
Haben wir einmal die sich tatsächlich ausschließenden Ereignisse gewonnen, so können wir nach Axiom 3 die Wahrscheinlichkeit für "weiblich" oder "Linkshänder" berechnen: diese ist die Summe der 76 Einzelwahrscheinlichkeiten. Die Wahrscheinlichkeit für das Auswählen eines Schülers beträgt 1/100. Also ist die Wahrscheinlichkeit für "weiblich" oder "Linkshänder" = 76/100.

Allgemein gilt:

Wahrscheinlichkeit von A oder B = Wahrscheinlichkeit von A plus Wahrscheinlichkeit von B minus der Wahrscheinlichkeit für das gleichzeitige Auftreten von A und B.

Die Wahrscheinlichkeit für Mädchen = 51/100; die Wahrscheinlichkeit für Linkshänder = 35/100; die Wahrscheinlichkeit für weiblicher Linkshänder = 10/100. Die Wahrscheinlichkeit für weiblich oder Linkshänder ist daher: 51/100 plus 35/100 minus 10/100 = 76/100!

b) *Multiplikationstheorem für voneinander abhängige Ereignisse*

Vorerst müssen wir klären, was unter abhängigen Ereignissen zu verstehen ist. Wir betrachten zwei Ereignisse, die sich gegenseitig nicht ausschließen. Definition: Ein Ereignis B ist von einem Ereignis A abhängig, wenn Ereignis B dann und nur dann eintritt, wenn Ereignis A eintritt. Soll nun bei der Berechnung der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses B

vorausgesetzt werden, dass ein Ereignis A mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit bereits eingetreten ist, so nennt man diese Wahrscheinlichkeit *bedingte* Wahrscheinlichkeit.
Zur Veranschaulichung gehen wir wiederum von unserer fiktiven Schule aus. Vorweg folgende Definition: Ziehen wir aus unserer Schule zufällig ein Mädchen, so bezeichnen wir dies als das Ereignis A. Dieses Ereignis A besteht aus 51 Elementarereignissen - den 51 Mädchen. Ziehen wir aus unserer Schule zufällig einen Linkshänder, so bezeichnen wir dies als Ereignis B. Das Ereignis B setzt sich zusammen aus 35 Elementarereignissen. Das sind alle Linkshänder in der Schule.
Nun ein Beispiel für ein abhängiges Ereignis:
Wir sondern aus unserer Schule zunächst alle Mädchen aus. Wir bezeichnen diese Auswahl als Ereignis A. Nach dieser Auswahl verbleiben insgesamt noch 51 Schüler. Wir wollen nun die Wahrscheinlichkeit wissen, aus den verbleibenden 51 Schülerinnen zufällig einen Linkshänder zu ziehen. Diese Wahrscheinlichkeit ist:
p (Linkshänder bei gegebenem Mädchen) = Anzahl aller linkshändigen Mädchen / Anzahl aller Mädchen = 10 / 51!

Nun ist die Anzahl aller linkshändigen Mädchen gleich der Anzahl aller Elementarereignisse von B (Linkshänder), die auch zu A (Anzahl aller Mädchen) gehören. Dieses Produkt der Ereignisse von A und B ergibt insgesamt 10 Schüler.

Allgemeiner formuliert heißt das: Die bedingte Wahrscheinlichkeit P (B|A) = (Anzahl aller Elementarereignisse von A und B) / Anzahl aller Elementarereignisse von A)

In unserem Beispiel: 10 / 51

Diese Formel ist identisch mit der folgenden:

$$p(B|A) = \frac{p(A \wedge B)}{P(A)}$$

Beweis:

Ereignis A tritt in k = 51 Fällen auf. Ereignis B in l = 35 Fällen. Das Produkt der beiden Ereignisse (die Schnittmenge der beiden Ereignisse) A *und* B ist m = 10.
Die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten sind:

P (A) = 51 / 100
P (B) = 35 / 100
P (A und B) = 10 / 100

Wie wir bereits wissen, ist P (B|A) = 10 / 51 = m / k

Dies ist äquivalent zu: (10/100) / (51/100) = (m / n) / (k / n)

Damit ist m / k äquivalent zu P (A und B) / P (A).

Was zu beweisen war.

Die bedingte Wahrscheinlichkeit spielt oft eine Rolle, wenn wir bei zwei nacheinander erfolgenden Ziehungen von Dingen (Karten, Kugeln in einer Urne und ähnliches) das gezogene Ding bei der zweiten Ziehung nicht zurücklegen. In diesem Falle hängt das Ergebnis der zweiten Ziehung vom Ergebnis der ersten Ziehung ab.

Aus der Formel für die bedingte Wahrscheinlichkeit läßt sich nun der Multiplikationssatz für abhängige Ereignisse ableiten.

Aus

$$p(B|A) = \frac{p(A \wedge B)}{P(A)}$$

ergibt sich:

$$p(A \wedge B) = p(B|A) \cdot p(A)$$

Das heißt: Haben zwei Ereignisse A und B bei einem Experiment die Wahrscheinlichkeit P (A) bzw. P (B), so beträgt die Wahrscheinlichkeit des gleichzeitigen Eintretens von A und B bei diesem Experiment

$$p(A \wedge B) = p(B|A) \cdot p(A)$$

Umgesetzt auf unser Beispiel bedeutet das:

$p\ (B|A) = 10/51$
$p\ (A) = 51/100$
$p(A \wedge B) = 10/51 \cdot 51/100 = 10/100$

Sind nun zwei Ereignisse voneinander unabhängig, so ist $p\ (B|A) = p\ (B)$. Daraus ergibt sich:

c) *Multiplikationstheorem der Wahrscheinlichkeiten für voneinander unabhängige Ereignisse*

$$p(A \wedge B) = p(A) \cdot p(B)$$

Beispiel: zweimal hintereinander eine 6 zu würfeln (p = 1/6 * 1/6).