

Kombinatorik

Zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit eines zusammengesetzten Ereignisses ist oft erforderlich, zwei verschiedene Anzahlen zu berechnen: die Anzahl aller Elementarereignisse und die Anzahl einer bestimmten Klasse von Ereignissen (Beispiel: die Anzahl aller roten Karten in einem Kartenpaket; die Anzahl aller Assen bei gegebenen roten Karten; die Anzahl aller geradzahigen Würfe bei einem Würfel usw.).

Statt diese verschiedenen Kombinationen von Ereignissen auszuzählen, können wir bestimmte Regeln der Kombinatorik verwenden, die uns die Arbeit des Auszählens erläutern.

Es sind vor allem drei verschiedenen Regeln (wobei es zu jeder Regel zwei Varianten gibt), die im Folgenden behandelt werden sollen, nämlich:

1. Permutationen 2. Variationen 3. Kombinationen

ad 1) Permutationen

a) *Permutationen von n verschiedenen Elementen*

Stellen Sie sich eine Anzahl von n verschiedenen Elementen vor. Beispiel: die Elemente a, b und c. Jede mögliche Anordnung dieser Elemente nennt man eine *Permutation*. Gefragt ist die Anzahl aller möglichen Permutationen.

Im Falle der drei Elemente a, b und c sind dies:

abc
acb
bac
bca
cab
cba

Das ergibt in der Summe 6 mögliche Permutationen. Diese verschiedenen möglichen Umstellungen der drei Elemente lassen sich auch nach der folgenden Regel berechnen:

Bei der Besetzung des ersten Platzes haben Sie drei Möglichkeiten (nämlich die Elemente a, b oder c). Ist der erste Platz besetzt, so bleiben für den zweiten Platz lediglich zwei Möglichkeiten offen. Bei insgesamt nur drei Elementen bleibt für den dritten Platz schließlich nur noch eine Möglichkeit. Das ergibt insgesamt $3 * 2 * 1 = 6$ mögliche Permutationen.

Bei n Elementen haben Sie insgesamt $n * (n-1) * (n-2) * .. 2 * 1$ mögliche Umstellungen. Dafür verwendet man die abgekürzte Schreibweise $n!$ (sprich: n Fakultät).

Bei 3 Elementen haben wir also 3! Permutationen, was gleich dem Produkt ist: $3 * 2 * 1$.

Beispiel: Bei einem Preisausschreiben werden 4 Schlagersänger nach dem Grad der Beliebtheit der Reihe nach geordnet. Wie viel verschiedene Reihungen sind möglich?
Antwort: 4!

b) *Permutationen von n Elementen, wobei n1 Elemente gleich sind*

Nehmen wir an, wir hätten statt der in unserem vorherigen Beispiel drei verschiedenen Elemente a, b und c insgesamt drei Elemente, von denen die letzten beiden gleich sind, also: a, b, b.

Dadurch reduzieren sich die Anzahl der möglichen Anordnungen auf 3, nämlich:

abb
bab
bba

Der Grund hierfür liegt daran, daß gleiche Elemente keine verschiedenen Umstellungen ergeben. In unserem gegebenen Fall sind die Anzahl der gleichen Elemente $n_1 = 2$. (das sind die beiden Elemente b, b). Wären die beiden Elemente verschieden, so würden sich unsere 3 möglichen Permutationen (bei den drei Elementen a, b, b) um den Faktor 2! erhöhen.

Die Anzahl der möglichen Permutationen von n Elementen, wobei n1 Elemente gleich sind, berechnet sich daher nach der Formel:

$$P_{n,n_1} = \frac{n!}{n_1!}$$

In unserem Beispiel (Elemente a, b, b) ergibt das:

$$\frac{3!}{2!} = 3$$

2) Variationen

a) *Variationen aus n verschiedenen Elementen*

Während es bei den Permutationen darum ging, alle n Elemente in eine bestimmte Anordnung zu bringen, geht es nun bei den Variationen einfach darum, aus insgesamt n Elementen k Elemente auszuwählen und diese in einer bestimmten Reihenfolge anzuordnen.

Beispiel: Wir wollen aus den vier Elementen a, b, c und d genau $k=2$ Elemente herausgreifen. Dabei ergeben sich insgesamt die 12 folgenden Möglichkeiten:

ab
ba
ac
ca
ad
da
bc
cb
bd
db
cd
dc

Zu diesen 12 Möglichkeiten kommen wir auch aufgrund der folgenden Überlegung:

Zur Belegung des ersten Platzes haben wir $n = 4$ Möglichkeiten (bei insgesamt 4 Elementen).

Da wir insgesamt nur zwei Plätze zur vergeben haben und beim zweiten Platz uns nur mehr $n-1 = 3$ Möglichkeiten zur Verfügung stehen, gibt es bei $k=2$ und $n=4$ Elementen insgesamt nur $4 * 3 = 12$ verschiedene Variationen.

Nun lassen sich die $n-1$ Möglichkeiten, die uns bei der Vergabe des zweiten Platzes zur Verfügung stehen auch so schreiben: $n - k + 1$. ($k = 2$; also gilt: $n - 2 + 1 = n - 1$.)

Allgemein gilt für die Berechnung von Variationen:

$$V_{n,k} = n * (n-1) * (n-2) * \dots * (n-k+1).$$

Diese Formel ist rechnerisch identisch mit:

$$V_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

b) Variationen aus n Elementen zur k -ten Klasse mit Wiederholung

Im Unterschied zu den unter Punkt a) besprochenen Variationen kann von den k Elementen, die wir aus insgesamt n Elementen in verschiedenen Anordnungen herausgreifen, jedes Element beliebig oft verwendet werden. Nicht nur ab und ba sind zulässige Anordnungen, dazu kommen jetzt noch die 4 Variationen aa, bb, cc, dd hinzu.

Zunächst die Formel: $V_{n,k} = n^k$

Zu dieser Formel kommen wir aufgrund der folgenden Überlegung: Wollen wir n Elemente auf k Plätze verteilen, so stehen uns für den ersten Platz n Elemente zur Verfügung. Da das

gleiche Element auch am zweiten Platz vorkommen kann, haben wir auch beim zweiten Platz wiederum n Elemente zur Verfügung. Ist k beispielsweise $= 3$, so ergeben sich daraus $n * n * n = n^3$ mögliche Variationen.

In unserem gegebenen Beispiel war $n = 4$ und $k = 2$. Wieso daraus gerade 4^2 mögliche Kombinationen resultieren, kann man sich auch an einem zweidimensionalen Koordinatensystem veranschaulichen. Wir tragen auf der x -Achse 4 Punkte auf. Die vier Punkte entsprechen unseren 4 Elementen a, b, c, d . Das gleiche tun wir auch auf der y -Achse. Verbindet man die 4 Punkte der x -Achse mit den vier Punkten der y -Achse, so entsteht ein zweidimensionales Gitter mit insgesamt 16 Schnittstellen. Wäre $k = 3$, wollten Sie also aus 4 Elementen 3 herausgreifen, so hätten wir ein dreidimensionales Koordinatensystem mit $4*4*4$ möglichen Schnittpunkten.

3) Kombinationen

a) *Kombinationen ohne Wiederholung*

Wir kommen nun zu den für die Statistik wohl wichtigstem Problem der Kombinatorik, nämlich zu den Kombinationen ohne Wiederholung. In diesem Falle geht es - ähnlich wie bei den Variationen - darum, k verschiedene Elemente aus insgesamt n Elementen herauszugreifen, wobei diesmal die Reihenfolge der herausgegriffenen Elemente keine Rolle spielt.

Betrachten wir wiederum den Fall von 4 Elementen a, b, c, d und greifen wir davon 2 Elemente heraus. Man nennt dies eine Kombination von 4 Elementen zur Klasse 2. Daraus ergeben sich insgesamt 6 mögliche Kombinationen:

ab
ac
ad
bc
bd
cd

Man kann dies auch so schreiben: $C_{n,k} = 6$

Die Formel zur Berechnung dieser 6 Kombinationen kann man sich klarmachen, wenn man an den Zusammenhang von Kombinationen und Variationen denkt. Im Unterschied zu den Kombinationen kommt es bei den Variationen auch auf die Anordnung der Elemente an. Will man aus den 6 Kombinationen die Variationen bekommen, so muß man bei jeder der 6 Kombinationen also noch die Anordnung berücksichtigen. Aus jeder der 6 Kombinationen lassen sich in unserem Beispiel zwei Variationen bilden: aus ab wird ab und ba ; aus ac wird ac und ca . Wir gewinnen also aus der Anzahl der 6 Kombinationen die Anzahl der

Variationen, indem wir jeweils die k Elemente pro Kombination auf alle möglichen Arten permutieren. Die Rechenformel für diese Permutation kennen wir bereits: sie ist $k!$

$k!$ ist in unserem Beispiel $2! = 2 \cdot 1 = 2$. Die Anzahl der Variationen ist also $6 \cdot 2 = 12$.

Allgemein gilt:

$$C_{n,k} \cdot k! = V_{n,k}$$

Nun ist

$$V_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$C_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

Für letzteren Ausdruck schreibt man auch $\binom{n}{k}$ (ausgesprochen: n über k)

Dieser Ausdruck wird auch als Binomialkoeffizient bezeichnet. Er ist ein wichtiger Baustein zum Verständnis der Binomialverteilung - einer der grundlegenden Verteilungen in der Statistik.

b) *Kombinationen mit Wiederholung*

der Vollständigkeit halber sei noch der Fall von Kombinationen angeführt, bei dem von den k Elementen jedes beliebig oft verwendet werden kann.

Beispiel: Wir haben wieder 4 Elemente a, b, c, d

Anzahl der Kombinationen hier = 10.

aa; bb; cc; dd; ab; ac; ad; bc; bd; cd

Die Berechnungsformel hierfür ist:

$$\binom{n+k-1}{k}$$

Ausblick

Die Auflistung der 6 verschiedenen Regeln der Kombinatorik erfüllt hier im Rahmen der Wahrscheinlichkeitstheorie lediglich eine vorbereitende Funktion. Schließlich geht es darum, die Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis bzw. für eine Klasse von Ereignissen berechnen zu können. Betrachten wir dazu folgendes Beispiel. Im österreichischen Lotto "6 aus 45" gibt es den Wahlslogan "Alles ist möglich". Versuchen wir, nunmehr gerüstet mit den Mitteln der Kombinatorik, diesen Spruch etwas genauer zu präzisieren bzw. zu quantifizieren. In der Urne befinden sich 45 verschiedene beschriftete Kugeln. Aus diesen 45 verschiedenen Kugeln werden nacheinander 6 Kugeln gezogen. Da es nicht auf die Reihenfolge ankommt - ein "sechser" setzt sich z.B. aus den Zahlen "4, 7, 10, 11, 15, 34" zusammen - handelt es sich in diesem Falle um eine Kombination. Da die Kugeln nach der Ziehung nicht zurückgelegt werden, handelt es sich um eine Kombination ohne Wiederholung.

Die Chance, einen "sechser" zu gewinnen, ist also: $1 : \binom{45}{6} =$

$$\frac{45!}{(45-6)!6!} = \frac{45 \cdot 44 \cdot 43 \cdot 42 \cdot 41 \cdot 40}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

$$= 1 : 8145060$$