Verfahren zur Überprüfung von Zusammenhangshypothesen

0. Allgemeines

Wir haben uns bisher mit Unterschiedshypothesen beschäftigt (Unterschiede von Stichproben in Bezug auf abhängige Variablen). Im Folgenden geht es um Zusammenhangshypothesen, d.h. um die Frage inwiefern Änderungen einer Variablen Rückschlüsse auf die Änderungen einer anderen Variablen zulassen.

Wozu brauchen wir das? Es geht darum, die Werte der zweiten Variablen aufgrund der Werte der ersten Variablen *voraussagen* zu können. Nennen wir die ersten Werte x-Werte und die zweiten Werte die y-Werte. Die Frage ist nun, inwiefern sich die y-Werte aufgrund der x-Werte voraussagen lassen.

Unsere Voraussage wird umso zutreffender sein, je stärker der *Zusammenhang* zwischen y-Werten und x-Werten ist. Dazu benötigen wir ein Maß für den Zusammenhang.

Betrachten wir dazu das folgende Beispiel: Stellen Sie sich vor, Sie müssten aufgrund eines Eignungstests die Begabung eines Schülers in Mathematik feststellen. Sie würden dazu eine Punkteskala verwenden, wobei wenige Punkte wenig Begabung und mehr Punkte mehr Begabung bedeuten würden. Je besser nun diese Punkte die späteren Schulnoten in Mathematik voraussagen können, umso stärker ist der Zusammenhang zwischen dem Eignungstest in Mathematik und den späteren Schulnoten.

Man kann zwei verschiedene Arten von Zusammenhängen unterscheiden: *funktionale* Zusammenhänge, die aufgrund einer mathematischen Funktionsgleichung exakte Voraussagen ermöglichen und *stochastische* Zusammenhänge, bei denen nur eine ungefähre Voraussage möglich ist.

Betrachten wir zum besseren Verständnis zunächst eine einfache Funktionsgleichung:

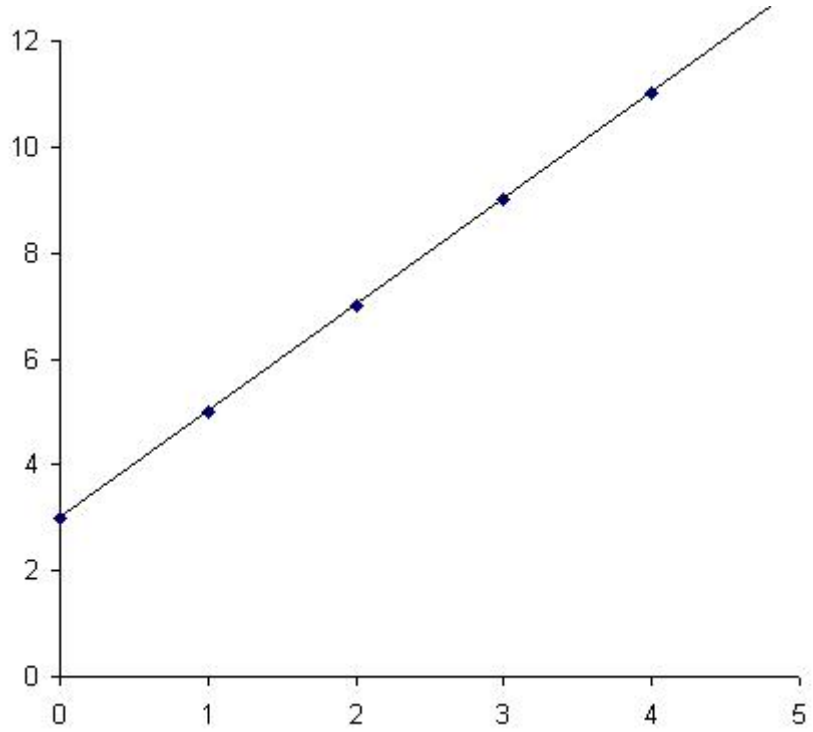
$$y = 2 \cdot x + 3$$

Wir können uns den exakten mathematischen Zusammenhang an einer einfachen Tabelle verdeutlichen:

x	y
0	3
1	5
2	7
3	9
4	11

Überträgt man diese Zahlenpaare in ein Koordinatensystem, so erhalten wir eine Gerade mit dem Anstieg 2 (d.h.: gehen wir eine Einheit in die x-Richtung, so müssen wir zwei Einheiten in die y-Richtung gehen) und dem Abschnitt auf der y-Achse 3. (wenn x = 0 ist, dann ist y = 3)

Man erhält diese Gerade auch dann, wenn man einfach zwischen zwei Zahlenpaaren, die Punkte im Koordinatensystem darstellen, eine Verbindung herstellt.



Im Falle eines derartigen exakten funktionalen Zusammenhangs brauchen wir die y-Werte nicht extra angeben, denn sie lassen sich ja aus den x-Werten mit Hilfe der Funktionsgleichung eindeutig berechnen. Das heißt: Kennen wir die x-Werte und haben wir zudem die Geradengleichung, dann können wir mit mathematischer Exaktheit die y-Werte *voraussagen*.

Wäre der Zusammenhang zwischen Eignungstest und Schulnoten derart mathematisch exakt, dann könnten wir uns die späteren Prüfungen in Mathematik ersparen.

Nun zum stochastischen Zusammenhang:

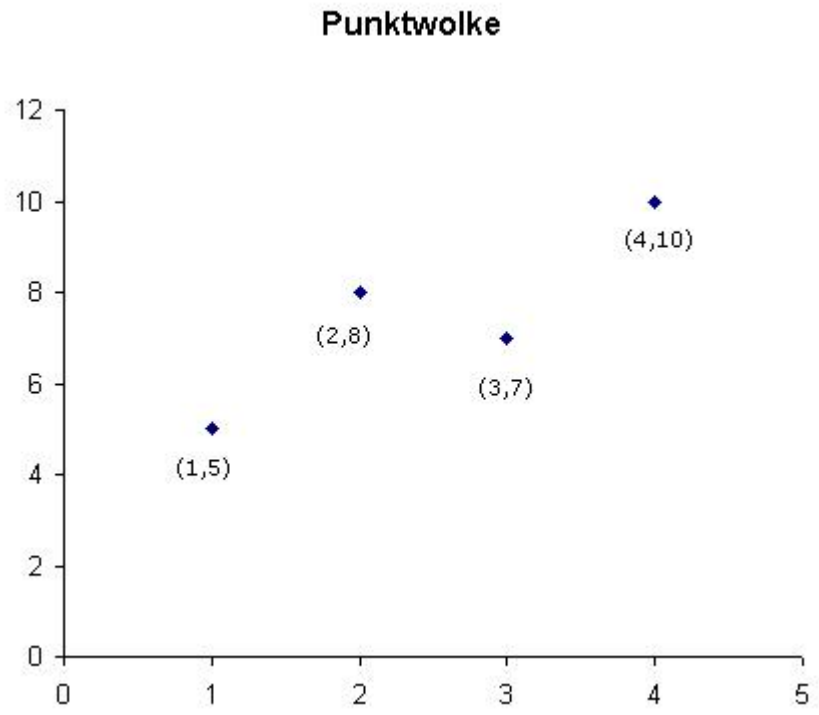
Auch beim stochastischen Zusammenhang bilden wir zunächst die Zahlenpaare in einer Tabelle. Beispiel:

x	y
1	5
2	8
3	7
4	10
$\bar{x} = 2.5$	$\bar{y} = 7.5$

Die Zahlenpaare sind nichts anderes als die Werte der beiden Variablen pro Person, wobei jede Zeile die beiden jeweiligen Werte einer Person enthält. Man kann nun auch diese Zahlenpaare in einem Koordinatensystem eintragen. Jedem Zahlenpaar entspricht ein Punkt in dem Koordinatensystem und jeder der Punkte bezeichnet die beiden Messwerte für die zwei Variablen pro Person.

Im Unterschied zum *funktionalen* Zusammenhang bilden die Punkte keine Gerade, sondern *streuen* um eine Gerade (oder um eine andere mathematische Funktion!). Wir haben es hier mit einem *stochastischen* bzw. *korrelativen* Zusammenhang zu tun. Die Punkte *streuen* rein zufällig um die Gerade (oder um eine andere mathematische Funktion). Je näher die Punkte sich zur Gerade befinden, umso eher lässt sich der stochastische Zusammenhang durch einen linearen funktionalen Zusammenhang erklären. Die Gerade, um die die Punkte streuen, ist also eine künstliche Idealisierung des stochastischen Zusammenhangs, u.zw. eine Darstellung des stochastischen Zusammenhangs durch einen linearen.

Eine derartige Streuung der Punkte bezeichnet man auch als Streuungsdiagramm oder auch als Punktediagramm.



1. Korrelation

Wir brauchen nun ein Maß, das uns besagt, wie eng die Punkte um eine idealisierte Gerade streuen. Ein derartiges Maß ist die Kovarianz.

Die Berechnungsformel dafür ist:

$$\mathrm{cov}(x, y) = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \overline{y})}{n}$$

Die Kovarianz ist der Mittelwert der Abweichungsprodukte einer bivariaten Verteilung. Sie besagt den Grad des miteinander Variierens zweier Verteilungen.

Überlegen wir uns dies an zwei Beispielen:

1) Wir gehen zunächst davon aus, dass eine *Zunahme* in der y-Richtung sich annähernd aus einer *Zunahme* in der x-Richtung erklären lässt. Höhere x-Werte ziehen höhere y-Werte nach sich. Umgekehrt ziehen niedere x-Werte auch entsprechend niedere y-Werte nach sich. Im idealen Falle lässt sich dies durch eine Geradengleichung ausdrücken. Beispiel: $y = 2 \cdot x + 3$. Wenn wir in diese Gleichung höhere x-Werte einsetzen, so werden auch die y-Werte zunehmen. Negative x-Werte führen zu negativen y-Werten (zu einer Verminderung der y-Werte) und positive x-Werte zu einer Erhöhung der y-Werte (zu positiven y-Werten).

Im Falle eines stochastischen Zusammenhanges liegen die Zahlenpaare nicht exakt auf einer Gerade, sondern streuen zufällig um die Gerade. Liegen die Punkte nun sehr nahe an der Gerade, so ergibt sich der folgende Umstand:

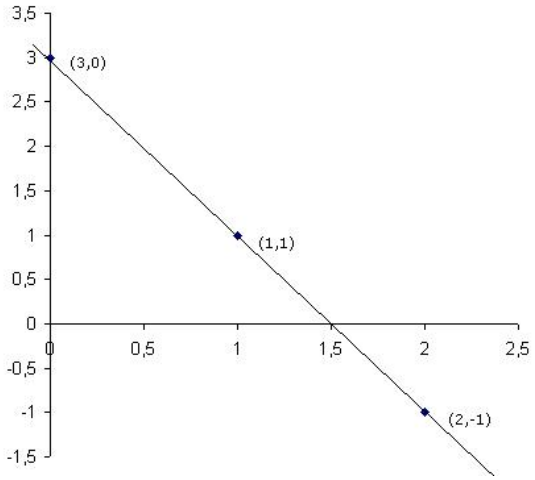
Liegen die x-Werte über ihrem Mittelwert (d.h. haben wir es mit *überdurchschnittlich hohen* x-Werten zu tun), so liegen auch die y-Werte über ihrem Mittelwert. Wir bekommen so ein hohes positives Produkt. (da sowohl bei x-Werten als auch bei y-Werten eine überdurchschnittliche Abweichung vorliegt).

Liegen die x-Werte *unter ihrem Mittelwert*, so liegen auch die y-Werte unter ihrem Mittelwert. Wir bekommen auch hier ein hohes positives Produkt (zwei Zahlen mit negativen Vorzeichen ergeben multipliziert ein positives Vorzeichen).

2) Wir gehen davon aus, dass eine *Zunahme* in der y-Richtung sich durch eine *Abnahme* in der x-Richtung erklären lässt. Niedere x-Werte ziehen in diesem Falle hohe y-Werte nach sich. Umgekehrt ziehen hohe x-Werte niedere y-Werte nach sich. Im idealen Falle bekommen wir folgende Geradengleichung: $y = -2 \cdot x + 3$. Setzen wir in diese Gleichung positive x-Werte ein, so bekommen wir entsprechend negative y-Werte. Negative x-Werte führen zu einer Erhöhung der y-Werte (zu positiven y-Werten), umgekehrt führen positive x-Werte zu negativen y-Werten.

Betrachten wir dazu folgende Tabelle:

X	Y
0	3
1	1
2	-1



Im Falle eines stochastischen Zusammenhanges liegen die Zahlenpaare nicht exakt auf einer Gerade, sondern streuen zufällig um die Gerade. Liegen die Punkte nun sehr nahe an der Gerade, so ergibt sich der folgende Umstand:

Liegen die x-Werte über ihrem Mittelwert (d.h. haben wir es mit überdurchschnittlich hohen x-Werten zu tun), so liegen die entsprechenden y-Werte unter ihrem Mittelwert. Wir bekommen so ein hohes negatives Produkt.

Liegen die x-Werte unter ihrem Mittelwert, so liegen die entsprechenden y-Werte über ihrem Mittelwert. Wir bekommen auch hier ein hohes negatives Produkt (zwei Zahlen mit verschiedenen Vorzeichen ergeben multipliziert ein negatives Vorzeichen).

Das Vorzeichen der Kovarianz sagt also *nichts über die Stärke des Zusammenhanges* aus, sondern nur etwas über die *Polung* des Zusammenhanges. Eine negative Kovarianz sagt uns, dass eine Erhöhung der x-Werte zu einer Verminderung der y-Werte führt, eine positive Kovarianz sagt uns umgekehrt, dass eine Erhöhung der x-Werte auch zu einer Erhöhung der y-Werte führt.

Was sagt uns dann etwas über die Stärke des Zusammenhanges aus? Die Höhe der absoluten Zahl - ohne Vorzeichen!

Nun ist aber die Kovarianz auch vom verwendeten Maßstab der Variablen abhängig. Multiplizieren wir beispielsweise die y-Werte mit dem Faktor 10, so erhalten wir auch eine um den Faktor 10 multiplizierte Kovarianz, obwohl sich am Zusammenhang nichts geändert hat!

Allgemein gilt: Werden die x-Werte mit dem Faktor k und die y-Werte mit dem Faktor l multipliziert, so ändert sich die Kovarianz um den Faktor k * l!

Beispiel für eine Berechnung der Kovarianz:

x	y	$x_i - \bar{x}$	$y_i - \bar{y}$	$(x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})$
3	3	-7	-3	21
7	5	-3	-1	3
11	7	1	1	1
14	6	4	0	0
15	9	5	3	15

$\bar{x} = 10$; $\bar{y} = 6$

Kovarianz = 40 / 5 = 8 (durchschnittliches Abweichungsprodukt)

$s^2_x = 100 / 5 = 20$; $s_x = 4{,}47$

$s^2_y = 20 / 5 = 4$; $s_y = 2$

Multiplizieren wir die y-Werte mit dem Faktor 10 (30; 50; 70; 60; 90), so erhalten wir eine Kovarianz von 80!

Dividieren wir die Kovarianz nun durch die Standardabweichungen s_x und s_y, so erhalten wir ein Zusammenhangsmaß, das gegenüber Maßstabsveränderungen invariant ist!

Dieses Maß ist der Korrelationskoeffizient r, auch Produkt-Moment-Korrelation (Bravais-Pearson-Korrelation) bezeichnet:

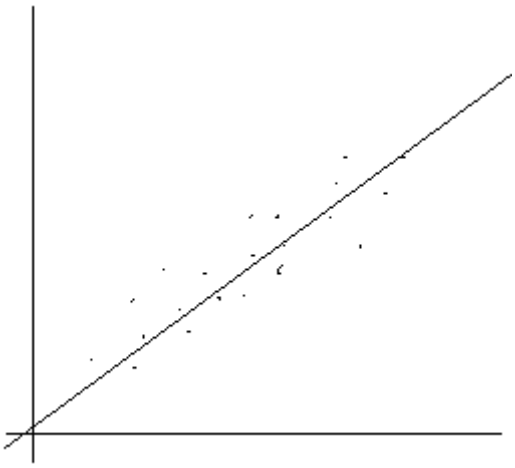
$$r = \frac{\mathrm{cov}(x, y)}{s_x \cdot s_y}$$

In unserem Beispiel: $r = 8/(4.47 \cdot 2) = 0{,}89$

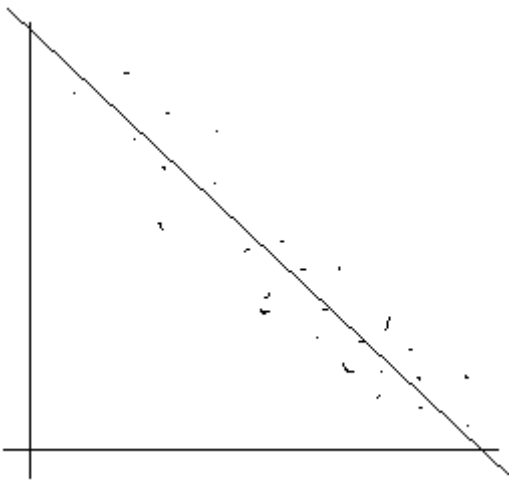
Allgemeines zur Korrelation

Beispiele für Zusammenhänge:

1) hohe positive Korrelation



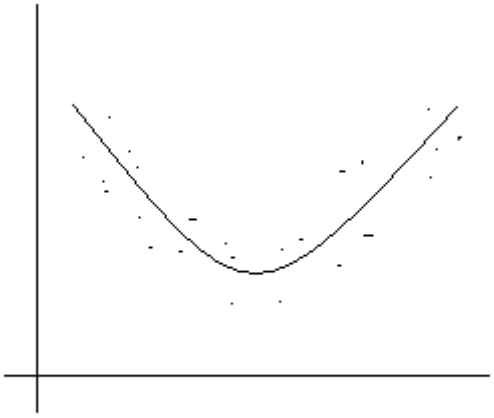
2) hohe negative Korrelation



Man beachte, dass die Begriffe "positiv" bzw. "negativ" sich nicht auf die Stärke des Zusammenhangs - diese wird durch den Absolutbetrag von r ausgedrückt -, sondern auf die Polung des Zusammenhangs beziehen.

3) Nichtlineare Zusammenhänge:

Beispiel: parabolischer Zusammenhang



Zum besseren Verständnis der Bedeutung des Produkt-Moment-Korrelationskoeffizienten folgende Überlegung: Was würde geschehen, wenn wir im Falle eines solchen parabolischen Zusammenhanges den Produkt-Moment-Korrelationskoeffizienten berechneten?

Die - vorläufige – Antwort lautet: Wir bekämen ein niedriges r!

Der Grund dafür ist der folgende: Der Produkt-Moment-Korrelationskoeffizient berechnet den Abstand der Zahlenpaare von einer idealen Geraden. Er ist daher ein Maß für die Stärke des *linearen* Zusammenhanges. Ist nun der Zusammenhang nicht linear (wie im Falle eines parabolischen Zusammenhanges), so besagt das noch lange nicht, dass überhaupt kein Zusammenhang besteht. Ein niedriges r sagt uns also nur, dass keine Geradengleichung sinnvoll die y-Werte aus den x-Werten voraussagen kann. Das bedeutet aber nicht automatisch, dass es keine *andere mathematische Funktion* gibt, die uns eine gute Voraussage ermöglicht.

Allgemein gilt: Wir können prinzipiell für jede beliebige Anordnung von Punkten eine mathematische Funktion finden, die den Zusammenhang in einer Funktionsgleichung (keine Geradengleichung!) beschreibt.

Warum tut man das aber nicht? Warum versucht man den Zusammenhang zwischen den Zahlenpaaren durch eine idealisierte Funktion (durch eine Gerade oder auch eine Parabel oder ähnliches) auszudrücken?

Dies hat einen wissenschaftstheoretischen Grund. Die Psychologie versucht - wie jede andere Wissenschaft - empirisch gegebene Daten auf *einfache*, durchschaubare und leicht handhabbare Gesetze zurückzuführen. So ist es für uns eben eine Information, wenn wir den Zusammenhang zwischen x-Werten und y-Werten durch eine Geradengleichung ausdrücken können. Die Geradengleichung ist ein intuitiv verstehbares Modell des Zusammenhangs.

Zusammenfassend gilt für den Produkt-Moment-Korrelationskoeffizienten: Er ist ein Maß für die Stärke der *Linearität* des Zusammenhangs. Liegen alle Punkte tatsächlich auf einer Geraden, so erhalten wir ein r von 1.

Ballen sich die Punkte um eine Punktwolke, so erhalten wir ein r = 0.

Zu niederen x-Werten finden sich in diesem Falle einmal hohe, zugleich aber auch niedere y-Werte (die Summe der $(x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})$ ergibt Null!)

Die beste Voraussage ist in diesem Falle eine Parallele zur x-Achse.

Allgemeine Voraussetzungen zur Berechnung von r:

1) Intervallskaliertheit beider Variablen

2) die bivariate Häufigkeitsverteilung sollte normalverteilt sein (das entspricht einer Glocke im dreidimensionalen Raum)

Zur allgemeinen Bedeutung der Korrelation:

1) kein funktionaler, deterministischer Zusammenhang - sondern stochastischer Zusammenhang

2) keine Kausalbeziehung:

Das bedeutet:

Wenn zwischen x und y eine hohe positive Korrelation vorliegt, so wissen wir nicht, ob

a) x y beeinflusst

b) y x beeinflusst

c) x und y von einer dritten Variable beeinflusst werden

d) x und y sich wechselseitig beeinflussen

Die Korrelation sagt lediglich, dass wir eine mathematische Funktion gefunden haben, die annähernd den Zusammenhang von x und y beschreibt. Warum aber dieser Zusammenhang besteht, ist damit nicht beantwortet.

Man betrachte das folgende Beispiel:

Man kann rein statistisch einen Zusammenhang zwischen der Fußzehengröße und der Intelligenz feststellen. Der Grund hierfür liegt einfach daran, dass bei einer Zufallsstichprobe auch Kleinkinder miterfasst werden. Der Zusammenhang zwischen Intelligenz und Fußzehengröße lässt sich somit auf eine dritte Variable zurückführen: auf das Alter!

Halten wir das Alter konstant (indem wir beispielsweise für die Korrelation zwischen Intelligenz und Fußzehengröße nut Gleichaltrige heranziehen), so verschwindet die Korrelation zwischen Fußzehengröße und Alter.

Inferenzstatistische Absicherung

Auch bei der inferenzstatistischen Absicherung von Zusammenhanghypothesen gibt es eine Null- und eine Alternativhypothese.

Die Nullhypothese lautet: es besteht kein Zusammenhang zwischen den beiden Variabeln.

Inferenzstatistisch betrachtet bedeutet dies, dass wir in der Gesamtpopulation ein $\rho = 0$ erwarten. Wir berechnen also wie wahrscheinlich es ist, unter Geltung der Nullhypothese das berechnete r (oder ein noch stärker von 0 abweichendes) zu bekommen. Ist diese Wahrscheinlichkeit sehr gering (Signifikanzniveau entweder 5% oder 1%), so entscheidet man sich für die Alternativhypothese.
Letztere besagt, dass zwischen den Variablen ein Zusammenhang besteht.

Um die Überschreitungswahrscheinlichkeit zu berechnen, wandeln wir den r-Wert in einen t-Wert um:

$$t = \frac{r \cdot \sqrt{n-2}}{\sqrt{(1-r^2)}}$$

Dieser t-Wert wird nun mit dem kritischen t-Wert der t-Tabelle mit n-2 Freiheitsgraden verglichen – ist $t >= t_{kritisch}$ so entscheiden wir uns für die Alternativhypothese.

Das bedeutet in unserem Beispiel

$$t = \frac{0{,}89 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{1-0{,}89^2}} = \frac{1{,}5415}{0{,}45} = 3{,}425$$

$$t_{krit;\,df=3} = 2{,}35$$

Da $t_{errechnet} \geq t_{kritisch}$ entscheiden wir uns für die H1.

2. Regression

Bis jetzt haben wir lediglich besprochen, wie man die Linearität des Zusammenhangs zweier Variablen mit Hilfe des Produkt-Moment-Korrelationskoeffizienten berechnen kann. Das Maß r sagt uns, wie sehr die stochastisch (zufällig) verteilten Punkte um eine *idealisierte* Gerade streuen. Die Frage ist nun, ob wir diese Gerade unter Zuhilfenahme des Maßes r rechnerisch genau ermitteln können. Die Frage ist also, um welche Gerade es sich denn eigentlich handelt.

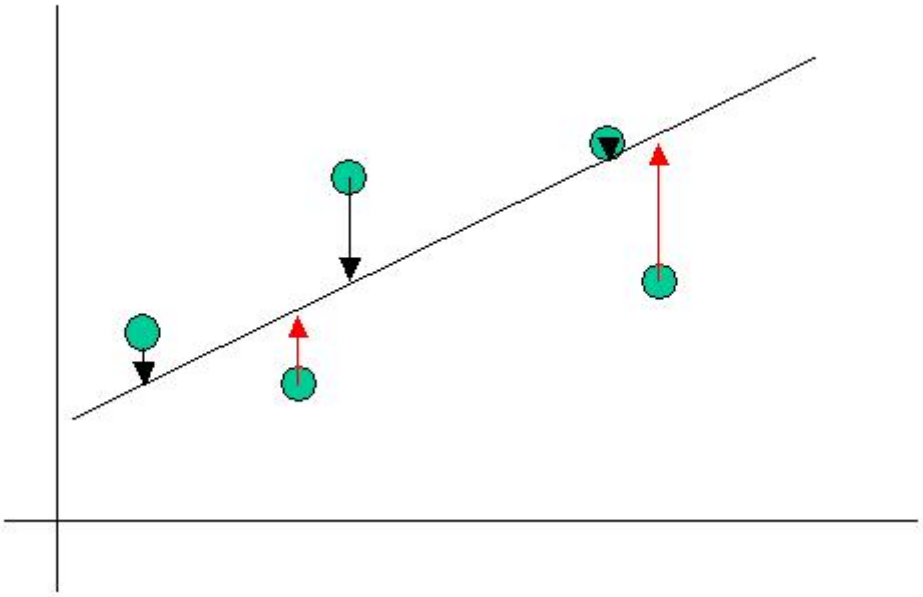
Allgemein gilt: Jede Gerade ist mathematisch durch die Geradengleichung festgelegt. Die Geradengleichung kennen wir bereits:

$$y = b \cdot x + a$$

b ist der Anstieg der Geraden, a ist der Abschnitt auf der y-Achse (die Stelle, an der die Gerade die y-Achse schneidet, bzw. an der x = 0 ist).

Wollen wir also die idealisierte Gerade für eine bestimmte Punktwolke ermitteln, so benötigen wir deren Koeffizienten a und b.

Nun hat die idealisierte Gerade folgende Eigenschaft: Jedem beobachteten y-Wert (y_i) entspricht ein geschätzter y-Wert (y^*_i) auf der Gerade.



Die geschätzten und die beobachteten y-Werte weichen voneinander ab, da die Gerade ja nur eine Schätzung des Zusammenhangs ist. Da wir daran interessiert sind, die y-Werte aus den x-Werten vorherzusagen, ist es für uns wichtig, die einzelnen Abweichungen der Punkte in der y-Richtung möglichst klein zu halten. Wir sind also an einer idealen Geraden interessiert, die den Vorhersagefehler möglichst *minimiert*.

Wir fordern für die idealisierte Gerade: die Summe der quadrierten Abweichungen (in y-Richtung) der beobachteten von den geschätzten Werten soll ein Minimum bilden. Wir wollen also durch die Punkte eine Gerade durchgelegen, die am idealsten die y-Werte schätzt.

Den Anstieg dieser Geraden und ihren Abschnitt auf der y-Achse (die Koeffizienten b und a) lassen sich mit der Differentialrechnung (Extremwertrechnung) ermitteln.

Wie dies im Einzelnen bestimmt wird, ist hier nicht von weiterem Interesse und wird daher in diesem Kontext vorausgesetzt. Die Bestimmung der Koeffizienten b und a erfolgt jedenfalls wie folgt:

Haben wir r (den Produkt-Moment-Korrelationskoeffizienten zwischen den beiden Variablen x und y) sowie die jeweiligen Standardabweichungen s_x und s_y berechnet, so lassen sich aus diesen drei Größen die Steigung der gewünschten Gerade b rein rechnerisch wie folgt ermitteln:

$$b = \frac{r \cdot s_y}{s_x}$$

In unserem Beispiel: r = 0.89; $s_y = 2$; $s_x = 4.47$

$b = \frac{0.89 \cdot 2}{4.47} = 0.398$, was ungefähr 0.4 ergibt.

Der Abschnitt auf der y-Achse a wird so berechnet:

$$a = \bar{y} - b \cdot \bar{x}$$

$$a = 6 - 0.4 \cdot 10 = 2$$

Daraus ergibt sich folgende Geradengleichung:

$$y^* = 0.4 \cdot x + 2$$

Eigenschaften dieser Geraden und der um sie streuenden Punkte:

- Die beobachteten Werte streuen um die Gerade. Die Streuung erfolgt so, dass die Summe der quadrierten Abweichungen der beobachteten Werte zu den geschätzten Werten ein Minimum ergibt.

- Der Mittelwert der geschätzten y-Werte ist gleich dem Mittelwert der beobachteten y-Werte ($\bar{y^*} = \bar{y}$)

- Die Varianz der beobachteten Werte ist die Summe der Varianzen der geschätzten Werte und der Varianz der Abweichungen. Anders gesagt: Die Abweichung eines Messwertes y_i

vom Mittelwert der y-Werte ($y_i - \bar{y}$) kann in einen Anteil zerlegt werden, der durch die Variable x "erklärt" wird ($y_i^* - \bar{y}$) und einen weiteren Anteil, der bei einer Regressionsvorhersage nicht erfasst wird ($y_i - y_i^*$).

Verdeutlichen wir uns diesen wichtigen Umstand an folgendem Beispiel:

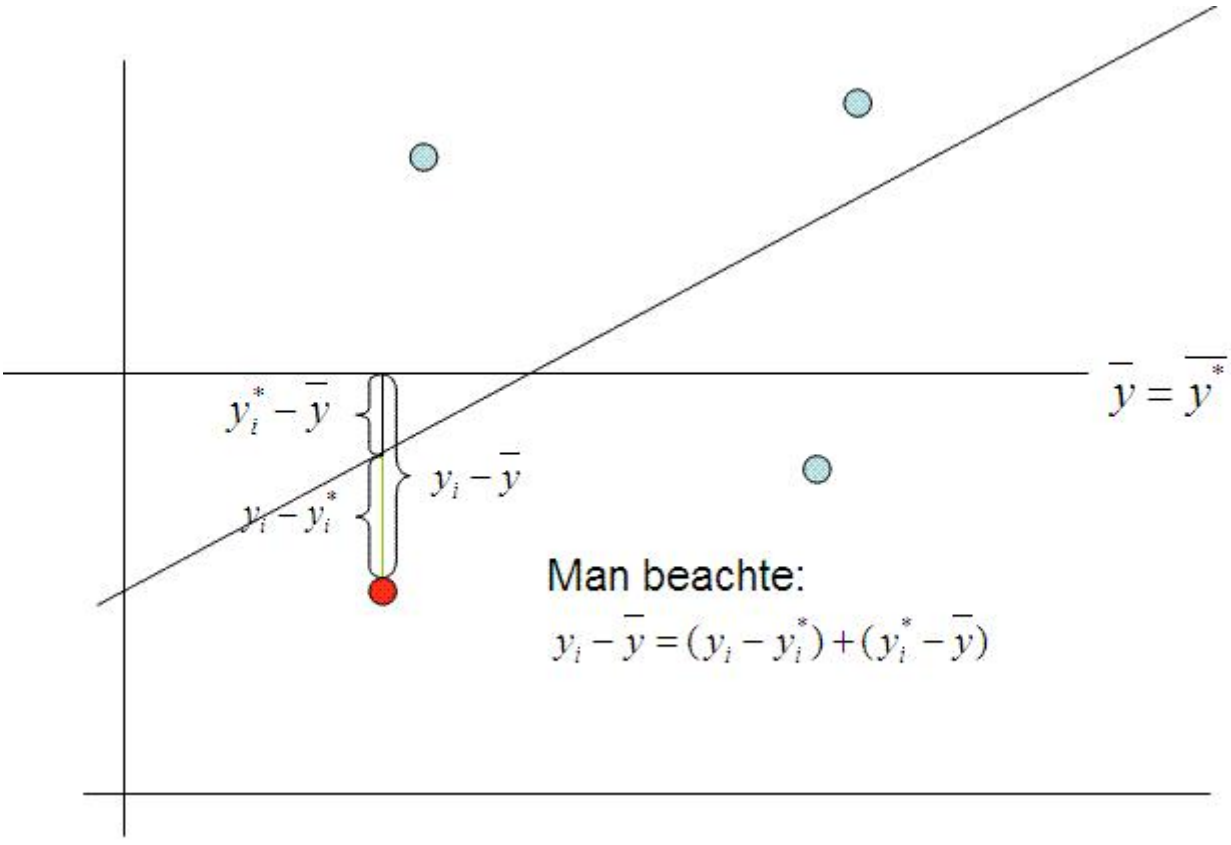
x	y	$y_i - \bar{y}$	y_i^*	$y_i^* - \bar{y}$	$y_i - y_i^*$
3	3	-3	3,2	-2,8	-0,2
7	5	-1	4,8	-1,2	0,2
11	7	1	6,4	0,4	0,6
14	6	0	7,6	1,6	-1,6
15	9	3	8,0	2,0	1,0

$s^2_y = 4$

$s^2_{y^*} = 16/5 = 3,2$

s^2(Streuung der y-Werte um die Gerade) = 4/5 = 0,8

$s^2y = s^2_{y^*} + s^2$(Streuung der y-Werte um die Gerade)



Das bedeutet: **der Abstand eines einzelnen y-Wertes vom Mittelwert der y-Werte setzt sich zusammen aus dem Abstand dieses y-Wertes von seinem geschätzten y-Wert und dem Abstand des geschätzten y-Wertes vom Mittelwert der y-Werte.**
(Siehe auch die Tabelle oben)

Der Anteil der Varianz, der durch die Regressionsvoraussage aufgeklärt wird, lässt sich nach der Formel

$r^2 * 100$ (= Determinationskoeffizient)

berechnen.

r = 0,89

heißt:

$0,89^2 * 100 = 79$ % der Varianz wird durch die Regressionsvoraussage aufgeklärt.

Das heißt anders ausgedrückt: Wie viel sind 3,2 von 4? Ca. 80%!

Ist r = 1, so werden 100% aufgeklärt (dann ist die Streuung der Punkte um die Gerade = 0)

Anhang

t-Verteilung

v	Wahrscheinlichkeit							
	0,75	0,875	0,90	0,95	0,975	0,99	0,995	0,999
1	1,000	2,414	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	318,309
2	0,817	1,604	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	22,327
3	0,765	1,423	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	10,215
4	0,741	1,344	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	7,173
5	0,727	1,301	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	5,893
6	0,718	1,273	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,208
7	0,711	1,254	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	4,785
8	0,706	1,240	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	4,501
9	0,703	1,230	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,297
10	0,700	1,221	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,144
11	0,697	1,214	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,025
12	0,695	1,209	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	3,930

13	0,694	1,204	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	3,852
14	0,692	1,200	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	3,787
15	0,691	1,197	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	3,733
16	0,690	1,194	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	3,686
17	0,689	1,191	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,646
18	0,688	1,189	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,611
19	0,688	1,187	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,579
20	0,687	1,185	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,552
21	0,686	1,183	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,527
22	0,686	1,182	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,505
23	0,685	1,180	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,485
24	0,685	1,179	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,467
25	0,684	1,178	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,450
26	0,684	1,177	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,435
27	0,684	1,176	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,421
28	0,683	1,175	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,408

29	0,683	1,174	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.396
30	0,683	1,173	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,385
40	0,681	1,167	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,307
50	0,679	1,164	1,299	1,676	2,009	2,403	2,678	3,261
60	0,679	1,162	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,232
70	0,678	1,160	1,294	1,667	1,994	2,381	2,648	3,211
80	0,678	1,159	1,292	1,664	1,990	2,374	2,639	3,195
90	0,677	1,158	1,291	1,662	1,987	2,368	2,632	3,183
100	0,677	1,157	1,290	1,660	1,984	2,364	2,626	3,174
200	0,676	1,154	1,286	1,653	1,972	2,345	2,601	3,131
300	--	--	1,284	1,650	1,968	2,339	2,592	3,118
400	--	--	1,284	1,649	1,966	2,336	2,588	3,111
500	0,675	1,152	1,283	1,648	1,965	2,334	2,586	3,107
∞	0,674	1,150	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,090

Von „http://de.wikipedia.org/wiki/Students_t-Verteilung“